سلم تصحيح مقرر رياضيات 2/ سنة أولى
الدورة الفصلية الثانية من العام الدراسي 2024-2025

السؤال الأول: (25 درجة)

أدرس الوضع النسبي للمستوي : $P(x,y,z) \equiv 3x+y-z-9=0$

مع الكرة : $S(x,y,z) \equiv (x-4)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=36$

ومن حال التقاطع أوجد مركز ونصف قطر دائرة التقاطع .

الحل: نلاحظ من معادلة الكرة أن نصف قطرها هو $R=6$ (5) ومركزها هو $W(4,7,-1)$ (5)

لذلك نوجد بعد مركز الكرة عن المستوي :

$$|\delta| = \frac{|P(4,7,-1)|}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{|12+7+1-9|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$$ (5)

لمقارنة البعد مع نصف قطر الكرة نجد أنّ : $\delta < R$

أي أن المستوي يقطع الكرة وفق دائرة (دائرة التقاطع)

إن نصف قطر دائرة التقاطع يتعين بالعلاقة : $r=\sqrt{R^2-\delta^2}=\sqrt{36-11}=\sqrt{25}=5$ (5)

أما لإيجاد مركز دائرة التقاطع فنوجد نقطة تقاطع WW' مع المستوي

إن معادلة WW' تعطى بالشكل :

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-7}{1}=\frac{z+1}{-1}=\lambda$$

هذه المعادلات تكتب وسيطياً بالشكل الآتي :

$$x=4+3\lambda$$
$$y=7+\lambda$$
$$z=-1-\lambda$$

لنوجد من معادلة المستوي نجد أن : $\lambda=-10$

بالتعويض من المعادلات الوسيطية نحصل على :

$$x=1, y=6, z=0$$

وبالتالي فمركز دائرة التقاطع هو : $W(1,6,0)$ (5)

السؤال الثاني : (20 درجة)

حساب قيمة التكامل $\iint_D (x-y)dxdy$ حيث D محدودة بالمنحنيان :

$y=2-x^2$
$y=2x-1$

علماً بأن المنحنيان يتقاطعان من النقطتين : $A(-3,-7), B(1,1)$

الحل: نلاحظ أن المنطقة D محدودة بالمستقيمين $x=1, x=-3$

والمنحنيين $y=2-x^2, y=2x-1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\iint_R (x-y)\,dx\,dy = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)\,dy$$

باعتبار x ثابتاً

تكامل أولاً بالنسبة لـ y

$$= \int_{-3}^{1} \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{2x-1}^{2-x^2} dx \qquad (10)$$

$$= \int_{-3}^{1} x(2-x^2) - \frac{(2-x^2)^2}{2} - x(2x-1) + \frac{(2x-1)^2}{2}\,dx$$

$$= \int_{-3}^{1} (2x - x^3) - \frac{1}{2}(4 + x^4 - 4x^2) - 2x^2 + x + \frac{1}{2}(4x^2 + 1 - 4x)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{1} \left[2x - x^3 - 2 - \frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - 2x^2 + x + 2x^2 + \frac{1}{2} - 2x \right] dx$$

$$= \int_{-3}^{1} \left[-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2} \right] dx$$

$$= \left[-\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x \right]_{-3}^{1} = \qquad (10)$$

$$\left(-\frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) - \left(-\frac{(-3)^5}{10} - \frac{(-3)^4}{4} + \frac{2}{3}(-3)^3 + \frac{(-3)^2}{2} - \frac{3}{2}(-3) \right)$$

$$= \frac{256}{60} = \frac{64}{15}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

12/ الصفحة
12/ بالإضافة

التمرين الثاني: [ج> 25]

المعادلة: $y' = 3x + 2y - 5$

نضع $z = 3x + 2y - 5$ نشتق بالنسبة لـ x فنحصل على

$z' = 3 + 2y'$ (5)

$\Rightarrow z' - 3 = 2y' \Rightarrow y' = \frac{z'-3}{2}$

نعوض في المعادلة المعطاة فنجد:

$z' - 3 = 2z \Leftarrow \frac{z'-3}{2} = z$

$\Rightarrow z' = 2z + 3 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2z + 3 \Rightarrow dz = (2z+3)\,dx$

$\frac{dz}{2z+3} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{2z+3} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2}{2z+3}\,dz = \int dx$

$\frac{1}{2}\ln(2z+3) = x \Rightarrow \ln(2z+3) = 2x \Rightarrow 2z+3 = e^{2x}$ (*)

نعوض z في (*) فنحصل على: (5)

$2(3x+2y-5)+3 = e^{2x}$

$6x + 4y - 10 + 3 = e^{2x} \Rightarrow 4y = e^{2x} - 6x + 7 \Rightarrow y = \frac{-6x + 7 + e^{2x}}{4}$

حل المعادلة: $y'' = 30x$

$y' = \int 30x\,dx = 30\frac{x^2}{2} + c_1 = 15x^2 + c_1$ (5)

$y = 15\frac{x^3}{3} + c_1 x + c_2 = \boxed{5x^3 + c_1 x + c_2}$

حل المعادلة: $y' = y^2(2x-3)$

$\frac{dy}{dx} = y^2(2x-3) \Rightarrow dy = y^2(2x-3)\,dx$ (5)

$\frac{dy}{y^2} = (2x-3)\,dx \Rightarrow y^{-2}\,dy = (2x-3)\,dx$

$\frac{y^{-1}}{-1} = \frac{2x^2}{2} - 3x + c$ (5)

$\frac{-1}{y} = x^2 - 3x + c \Rightarrow \boxed{y = \frac{-1}{x^2 - 3x + c}}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner